大学で教える株式投資論

株式投資の入門から専門実務まで

I-11．ポートフォリオの理論（２）

ポートフォリオの
期待リターンとリスク

さあ、ポートフォリオ理論の本丸の「ポートフォリオの期待リターンとリスク」です。前にも言いましたように、大学教育としてのポートフォリオ理論の講義では、文系学生の最も嫌がる数式を使った説明を避けて通れないと考えています。相関係数がリスクにどのように影響を与えるかのメカニズムを知ることが、この理論を理解する鍵だからです。

自分自身で手を動かして、数式を書かせることから始めます。予想通りですが、学生のノリはよくありません。アクティブ・ラーニングとして成功したとは言えません。別の方法を考えるべきなのでしょうね。

内容にはいる前に

- 期待値、分散、標準偏差、相関係数、共分散の関係
  - 変数を X, Y とすると、

    期待値 $E[X]$, $E[Y]$

    分散 $V[X]$, $V[Y]$ 標準偏差 $\sigma[X]$, $\sigma[Y]$

    相関係数 $\rho[X,Y]$ 共分散 $COV[X,Y]$

  - 変数 aX, bY の期待値と分散は？

    期待値 $E[aX]=aE[X]$, $E[bY]=bE[Y]$

    分散 $V[aX]=a^2V[X]$, $V[bY]=b^2V[Y]$

  - 分散、標準偏差、相関係数、共分散の間の関係は？

$$V[X]=\sigma[X]^2,\quad V[Y]=\sigma[Y]^2$$
$$COV[X,Y]=\sigma[X]\sigma[Y]\rho[X,Y]$$

  - 変数 aX, bY の相関係数と共分散は？

$$COV[aX,bY]=abCOV[X,Y]$$
$$=\sigma[aX]\sigma[bY]\rho[aX,bY]=a\sigma[X]b\sigma[Y]\rho[X,Y]=ab\sigma[X]\sigma[Y]\rho[X,Y]$$

内容にはいる前に

› 期待値、分散、標準偏差、相関係数、共分散の関係

› $W = X + Y$とすると、

$$E[W] = E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\begin{aligned} V[W] &= V[X+Y] \\ &= V[X] + V[Y] + 2COV[X,Y] \\ &= \sigma[X]^2 + \sigma[Y]^2 + 2\sigma[X]\sigma[Y]\rho[X,Y] \end{aligned}$$

› $W = aX + bY$とすると、

$$E[W] = E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y]$$

$$\begin{aligned} V[W] &= V[aX+bY] \\ &= V[aX] + V[bY] + 2COV[aX,bY] \\ &= a^2V[X] + b^2V[Y] + 2abCOV[X,Y] \\ &= \sigma[aX]^2 + \sigma[bY]^2 + 2\sigma[aX]\sigma[bY]\rho[aX,bY] \\ &= a^2\sigma[X]^2 + b^2\sigma[Y]^2 + 2ab\sigma[X]\sigma[Y]\rho[X,Y] \end{aligned}$$

内容にはいる前に

- 分散、標準偏差、相関係数、共分散の関係
  - $W = aX + bY$ 、 $\rho[X,Y]=0$ 、 $V[Y]=0$ の時、

$$V[W]=$$

$$\sigma[W]=$$

内容にはいる前に

- 分散、標準偏差、相関係数、共分散の関係
  - $W=aX+bY$ 、 $\rho[X,Y]=1$ の時、

$$V[W]=$$

$$\sigma[W]=$$

内容にはいる前に

› 分散、標準偏差、相関係数、共分散の関係

› $W = aX + bY$ 、 $\rho[X,Y] = -1$ の時、

$$V[W] =$$

$$\sigma[W] =$$

内容にはいる前に

- 分散、標準偏差、相関係数、共分散の関係
  - $W = aX + bY$ 、 $\rho[X, Y] = 0$ の時、

$$V[W] =$$

$$\sigma[W] =$$

株式の組み合わせ

まず2つの株式の組み合わせから、始めます。その組み合わせ比率に応じてポートフォリオの期待リターンとリスクがどう変化するのかを確認するのです。ここに相関係数および共分散という概念が登場します。もし2つの株式の同調する力が強い場合にリスクが高くなるとすると、逆に2つの株式の反発する力が強い場合にはリスクはどうなるのでしょうか？

この講義では、その関係を数式とグラフで確認しながら、株式を3銘柄に増やし、さらにはもっと多くの銘柄のポートフォリオの状態を類推します。同じリスク水準のポートフォリオが多数あった場合に、投資家に選ばれるのは、もちろん最も期待リターンが高いポートフォリオです。

2つの株式資産の組み合わせ（１）

- 2つの株式資産のリターンや標準偏差を以下のように定義

2つの株式資産のリターン： r_A , r_B

同期待リターン： $E[r_A]$, $E[r_B]$

同標準偏差：$\sigma[r_A]$, $\sigma[r_B]$ 同分散：$V[r_A]$, $V[r_B]$

2つの株式資産の相関係数： $\rho[r_A, r_B]$

- 2つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ

ポートフォリオのリターン： $r_p = xr_A + (1-x)r_B$

同期待リターン： $\boxed{E[r_P]} = E[xr_A + (1-x)r_B] \boxed{= xE[r_A] + (1-x)E[r_B]}$

同分散： $V[r_P] = V[xr_A + (1-x)r_B]$

$$= x^2 V[r_A] + 2x(1-x)\sigma[r_A]\sigma[r_B]\rho[r_A, r_B] + (1-x)^2 V[r_B]$$

同標準偏差： $\boxed{\sigma[r_P] = \sqrt{x^2 V[r_A] + 2x(1-x)\sigma[r_A]\sigma[r_B]\rho[r_A, r_B] + (1-x)^2 V[r_B]}}$

2つの株式資産の組み合わせ（2）

- 2つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  - 確認…相関係数が「１」のケース

ポートフォリオのリターン：$r_p = xr_A + (1-x)r_B$

同期待リターン：$\boxed{E[r_P]} = E[xr_A + (1-x)r_B] \boxed{= xE[r_A] + (1-x)E[r_B]}$

同分散：$V[r_P] = V[xr_A + (1-x)r_B]$

$$= x^2 V[r_A] + 2x(1-x)\sigma[r_A]\sigma[r_B]\rho[r_A, r_B] + (1-x)^2 V[r_B]$$

ここで$\rho[r_A, r_B] = 1$とすると、

$$V[r_P] = x^2 V[r_A] + 2x(1-x)\sigma[r_A]\sigma[r_B] + (1-x)^2 V[r_B]$$

$$= \{x\sigma[r_A] + (1-x)\sigma[r_B]\}^2$$

同標準偏差：$\boxed{\sigma[r_P]} = \sqrt{\{x\sigma[r_A] + (1-x)\sigma[r_B]\}^2}$

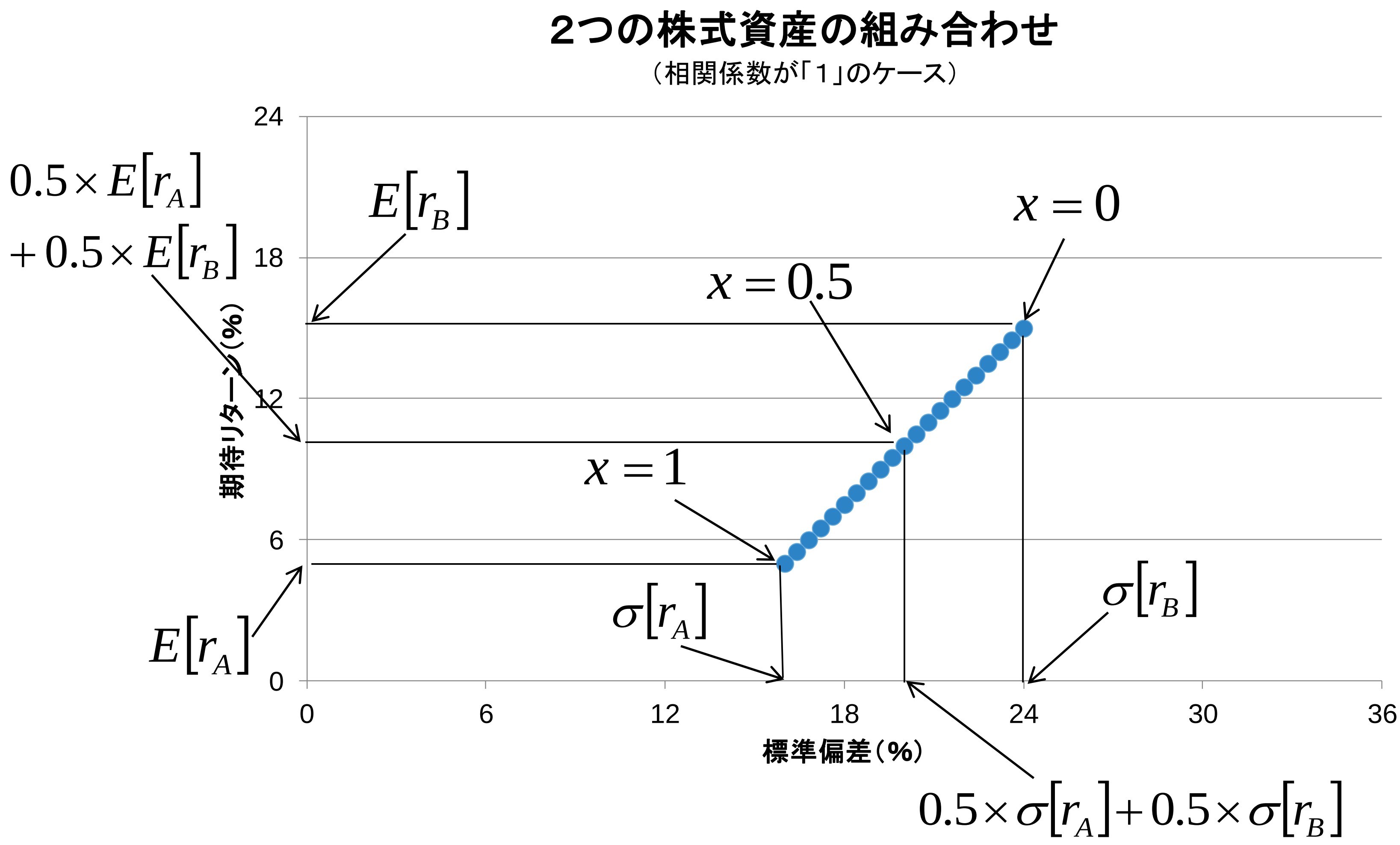
$$= \boxed{x\sigma[r_A] + (1-x)\sigma[r_B]}$$

$\sigma[r_P] \geq 0$　なので、

$\sigma[r_P] = -\{x\sigma[r_A] + (1-x)\sigma[r_B]\}$　は解にならない

2つの株式資産の組み合わせ（3）

- 2つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  - 確認…相関係数が「１」のケース



2つの株式資産の組み合わせ（4）

- 2つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  - 確認…相関係数が「-１」のケース

ポートフォリオのリターン：　$r_p = xr_A + (1-x)r_B$

同期待リターン：　$\boxed{E[r_P]} = E[xr_A + (1-x)r_B] \boxed{= xE[r_A] + (1-x)E[r_B]}$

同分散：　$V[r_P] = V[xr_A + (1-x)r_B]$

$$= x^2 V[r_A] + 2x(1-x)\sigma[r_A]\sigma[r_B]\rho[r_A, r_B] + (1-x)^2 V[r_B]$$

ここで$\rho[r_A, r_B] = -1$とすると、

同標準偏差：　$\sigma[r_P] = \sqrt{\{x\sigma[r_A] - (1-x)\sigma[r_B]\}^2}$

$$= \pm\{x\sigma[r_A] - (1-x)\sigma[r_B]\}$$

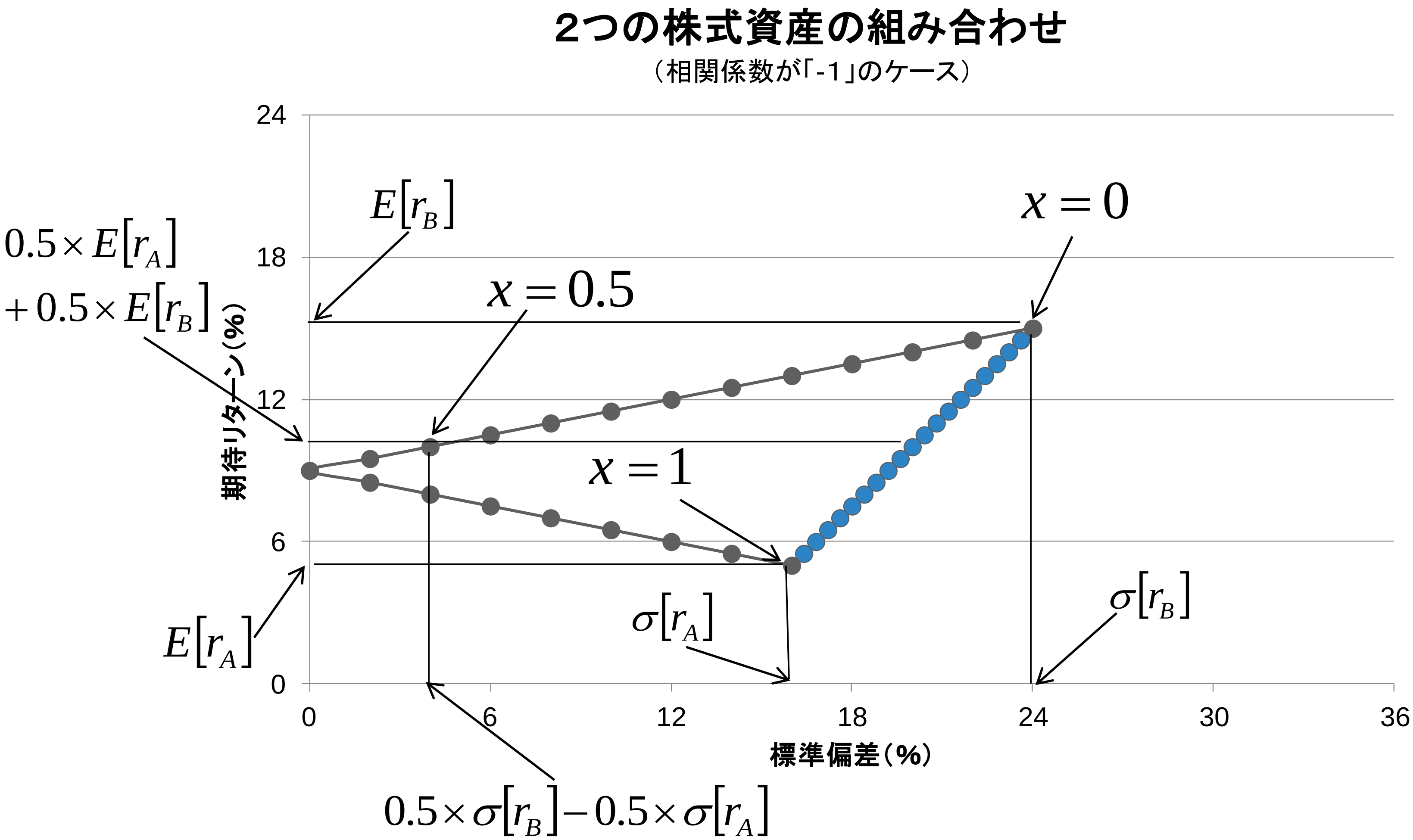
$\sigma[r_P] \geq 0$であるから、

$x\sigma[r_A] \geq (1-x)\sigma[r_B]$の時は、$\sigma[r_P] = x\sigma[r_A] - (1-x)\sigma[r_B]$

$x\sigma[r_A] \leq (1-x)\sigma[r_B]$の時は、$\sigma[r_P] = (1-x)\sigma[r_B] - x\sigma[r_A]$

2つの株式資産の組み合わせ（5）

- 2つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  - 確認…相関係数が「-１」のケース



2つの株式資産の組み合わせ（６）

- 2つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  - 確認…相関係数が「0」のケース

ポートフォリオのリターン： $r_p = xr_A + (1-x)r_B$

同期待リターン： $\boxed{E[r_P]} = E[xr_A + (1-x)r_B] \boxed{= xE[r_A] + (1-x)E[r_B]}$

同分散： $V[r_P] = V[xr_A + (1-x)r_B]$

$$= x^2 V[r_A] + 2x(1-x)\sigma[r_A]\sigma[r_B]\rho[r_A, r_B] + (1-x)^2 V[r_B]$$

ここで$\rho[r_A, r_B] = 0$とすると、

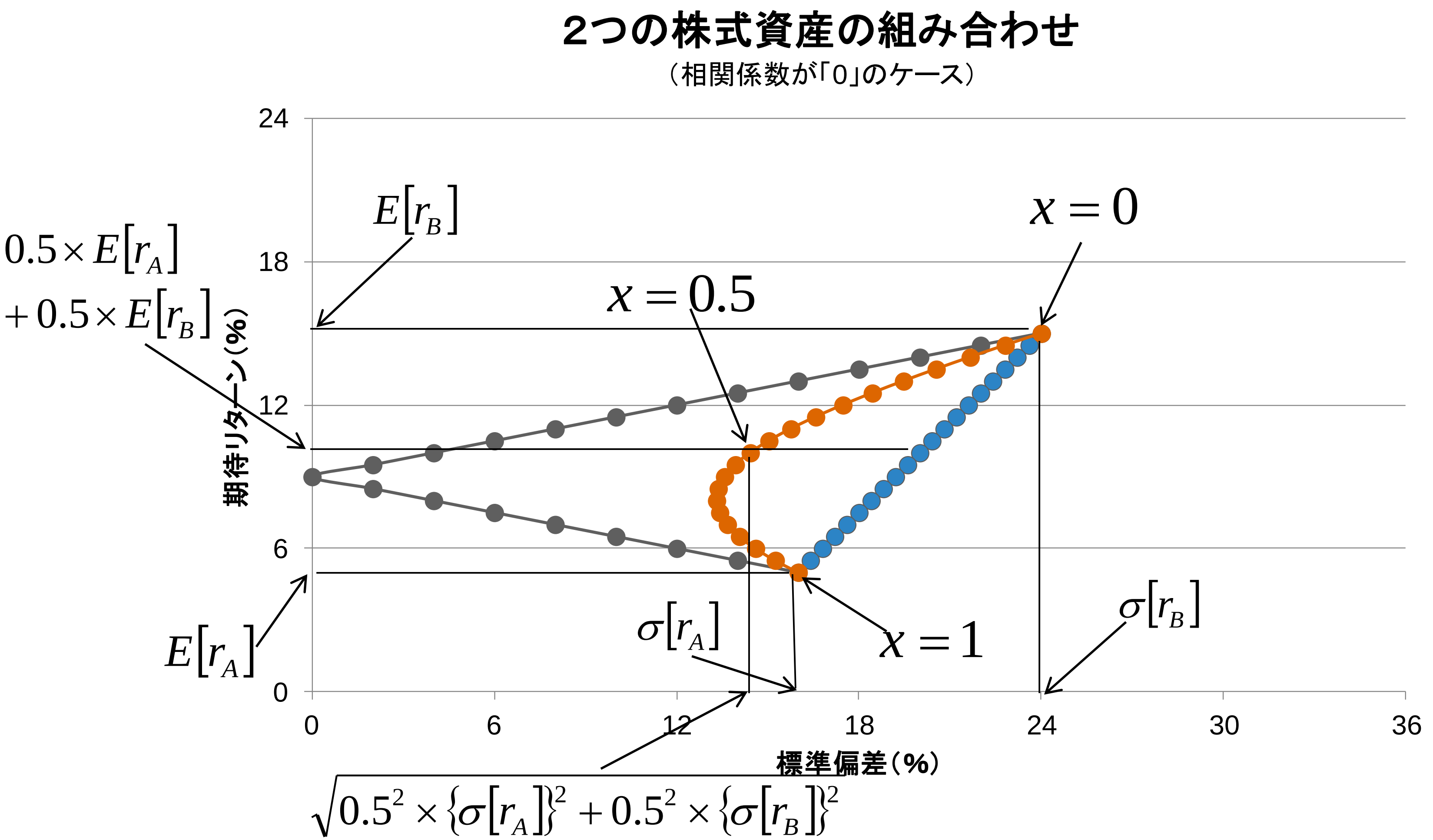
$$V[r_P] = x^2 V[r_A] + (1-x)^2 V[r_B]$$

同標準偏差： $\boxed{\sigma[r_P]} = \sqrt{x^2 V[r_A] + (1-x)^2 V[r_B]}$

$$\boxed{= \sqrt{x^2 \{\sigma[r_A]\}^2 + (1-x)^2 \{\sigma[r_B]\}^2}}$$

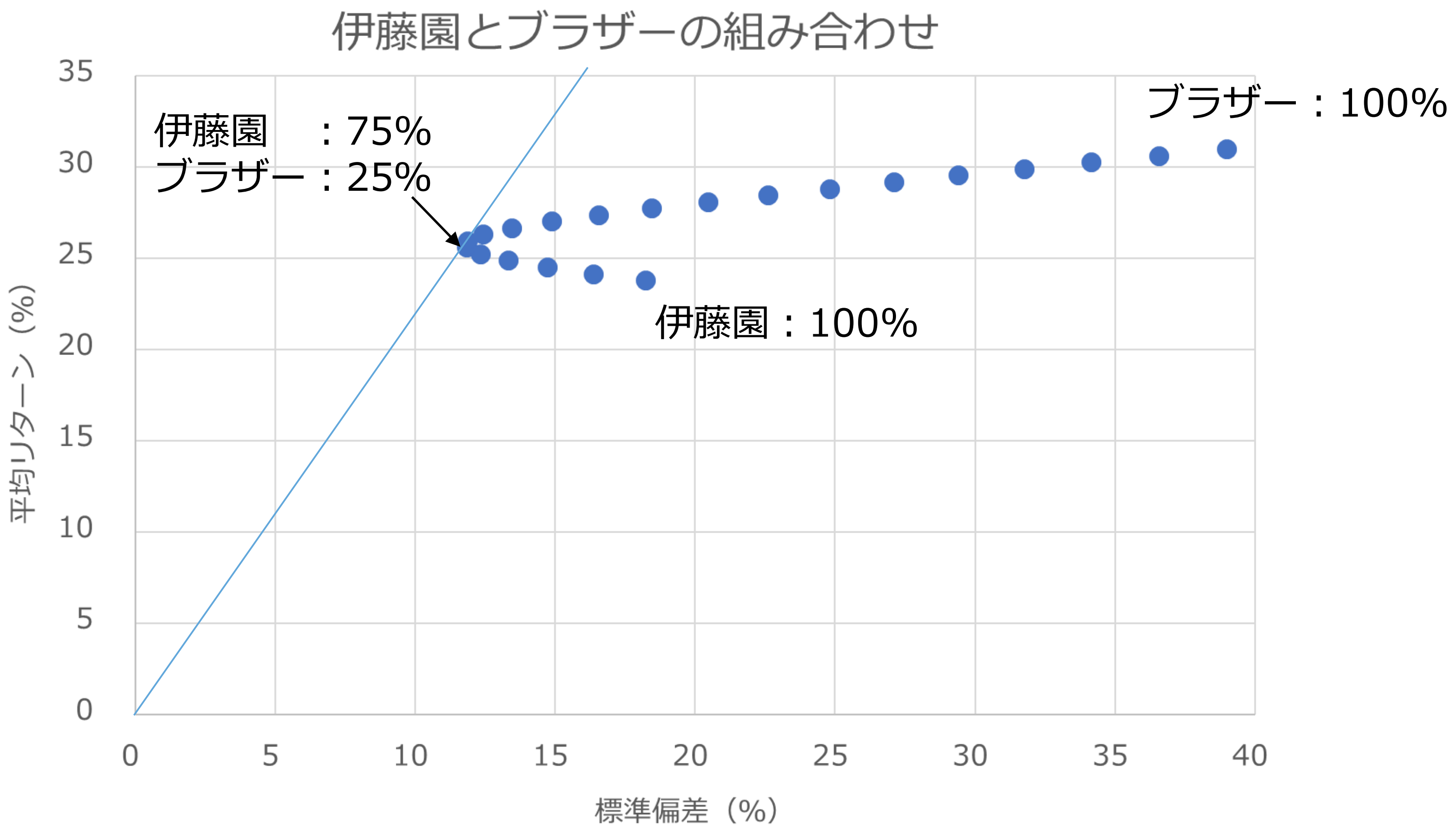
2つの株式資産の組み合わせ（5）

- 2つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  - 確認…相関係数が「0」のケース



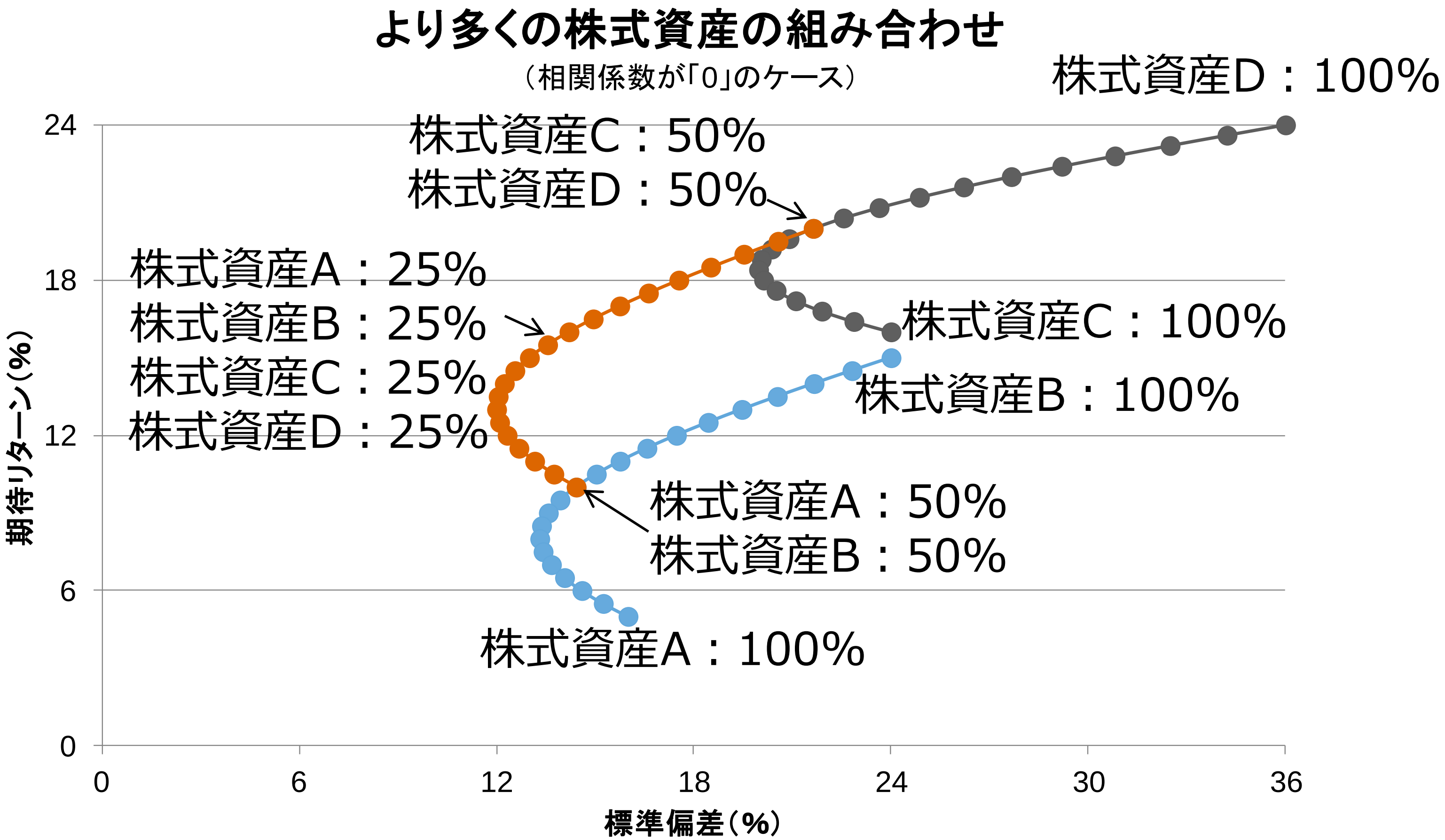
2つの株式資産の組み合わせ（6）

- 伊藤園とブラザーを組み合わせたポートフォリオ
  - 相関係数が「-0.54」のケース



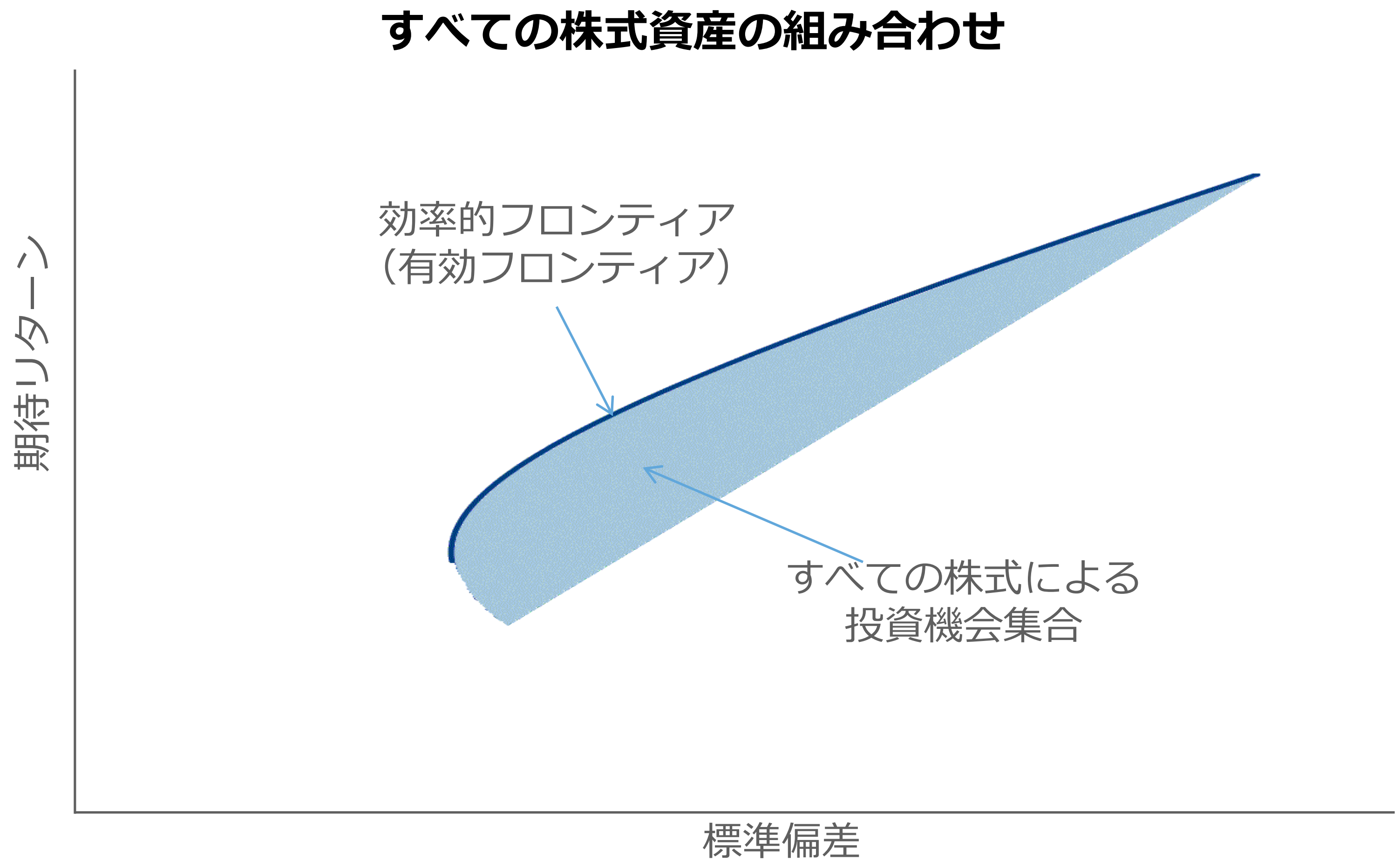
より多くの株式資産の組み合わせ（１）

› 4つの株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  › 相関係数が「0」のケース



より多くの株式資産の組み合わせ（２）

- すべての株式資産を組み合わせたポートフォリオ
  - それぞれの資産間の推定相関係数を適用



ハリー・マーコウィッツ

- Harry Markowitz（1990年にノーベル経済学賞を受賞）
- 「ポートフォリオ・セレクション」(1952年)
  - 「平均・分散理論」…リターンの平均値と標準偏差（分散）で、個別証券およびポートフォリオの期待リターンとリスクの性格を論じた
  - ポートフォリオの銘柄を増やすほど、そのリスクは低減
  - リスクの低減の程度は銘柄間の相関係数（共分散）に依存
  - この関係から、特定のリターン水準においてリスクが最小のポートフォリオ、特定のリスク水準において期待リターンが最大のポートフォリオを選択することができる
  - 上記のポートフォリオの集合は後に「効率的フロンティア」と呼ばれる
- 全文14ページの論文で、1960年代にはいるまで他の学術論文に引用された回数は20回にも満たなかった
- 彼の論文に端を発し、現代ポートフォリオ理論（Modern Portfolio Theory、MPT）が展開されて行った
- 市場に存在するすべての銘柄間の相関係数は当時の計算能力ではほとんど「無数」に存在し、実務的な適用は困難だった

出所：「証券投資の思想革命」、ピーター・バーンスタイン著、東洋経済新報社、1993年

リスクフリー資産

「フリー」という言葉は「～から解放された」状態を表すのに使われます。「リスクフリー資産」は「無リスクの資産」の意味です。市場には厳密なリスクフリー資産は存在しませんが、大手銀行の普通預金を頭に描いてもほとんど支障ありません。

株式で作ったポートフォリオとリスクフリー資産を組み合わせると、また違った期待リターンとリスクの関係が浮かび上がってきます。

リスク・フリー資産と株式資産（１）

› リスク・フリー資産を以下のように定義

リスク･フリー資産のリターン： r_f

同期待リターン： $E[r_f] = r_f$

同標準偏差： $\sigma[r_f] = 0$ 　同分散： $V[r_f] = 0$

株式資産との相関係数： $\rho[r_f, r_S] = 0$

› 株式資産とリスク・フリー資産の組み合わせたポートフォリオ

株式資産のリターン： r_S

ポートフォリオのリターン： $r_p = xr_S + (1-x)r_f$

同期待リターン： $\boxed{E[r_P]} = E[xr_S + (1-x)r_f] = \boxed{xE[r_S] + (1-x)r_f}$

同分散： $V[r_P] = V[xr_S + (1-x)r_f]$

$$= x^2 V[r_S] + 2x(1-x)\sigma[r_S]\sigma[r_f]\rho[r_f, r_S] + (1-x)^2 V[r_f]$$

$\sigma[r_f] = 0$、 $V[r_f] = 0$、 $\rho[r_f, r_S] = 0$であるから、

$V[r_P] = x^2 V[r_S]$、 したがって $\boxed{\sigma[r_P] = x\sigma[r_S]}$

Xは0以上、1以下、
σは0以上

リスク・フリー資産と株式資産（２）

- 確認
  - 株式資産の組入比率がゼロの時、

株式資産の組入比率： $x=0$

ポートフォリオの期待リターン： $E[r_P]=xE[r_S]+(1-x)r_f=r_f$

同標準偏差： $\sigma[r_P]=x\sigma[r_S]=0$

  - 株式資産の組入比率が「100%」の時、

株式資産の組入比率： $x=1$

ポートフォリオの期待リターン： $E[r_P]=xE[r_S]+(1-x)r_f=E[r_S]$

同標準偏差： $\sigma[r_P]=x\sigma[r_S]=\sigma[r_S]$

  - 株式資産の組入比率が「1より大きい」、例えば「150%」の時、

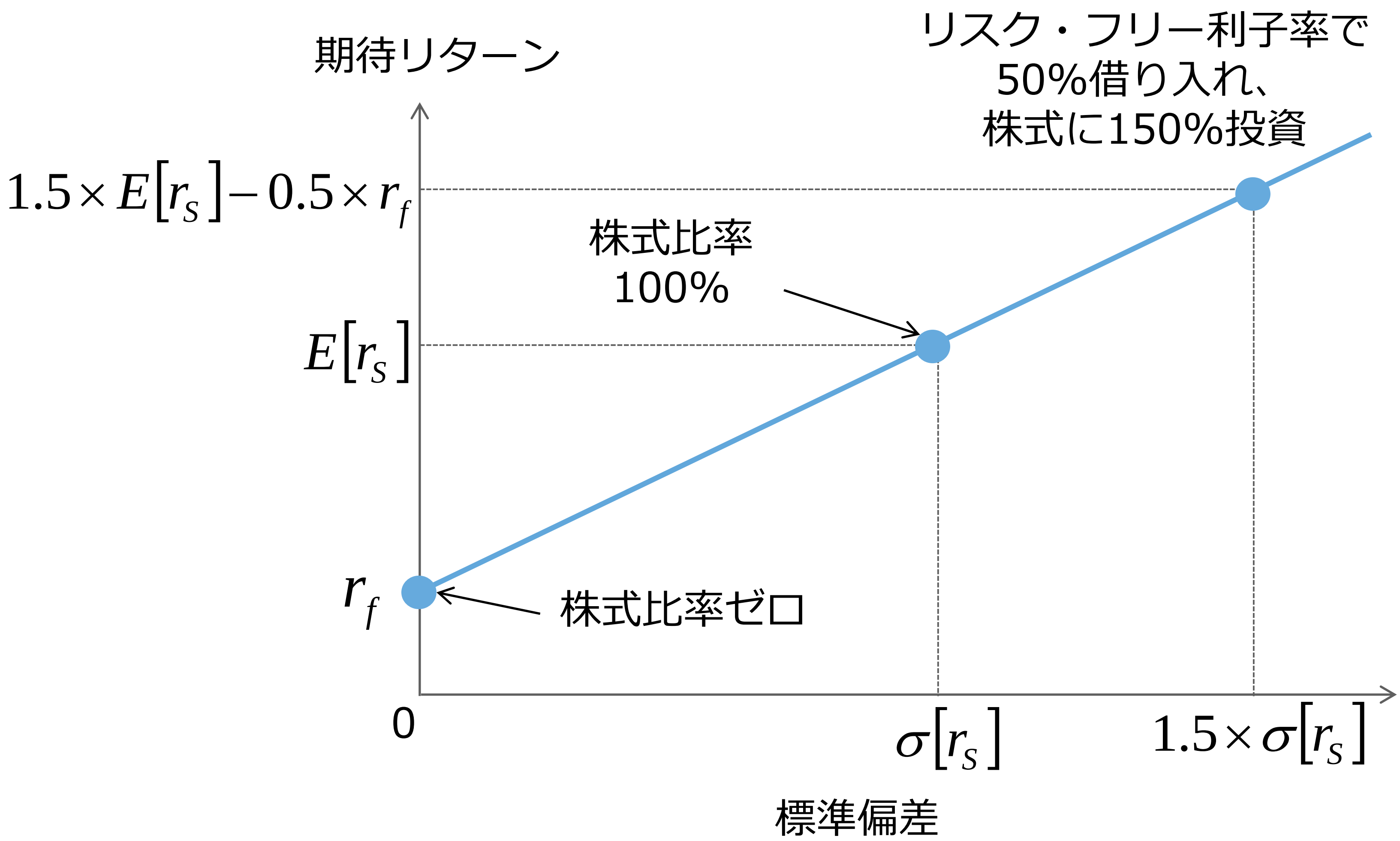
株式資産の組入比率： $x=1.5$

期待リターン： $E[r_P]=xE[r_S]+(1-x)r_f=1.5\times E[r_S]-0.5\times r_f$

同標準偏差： $\sigma[r_P]=x\sigma[r_S]=1.5\times\sigma[r_S]$

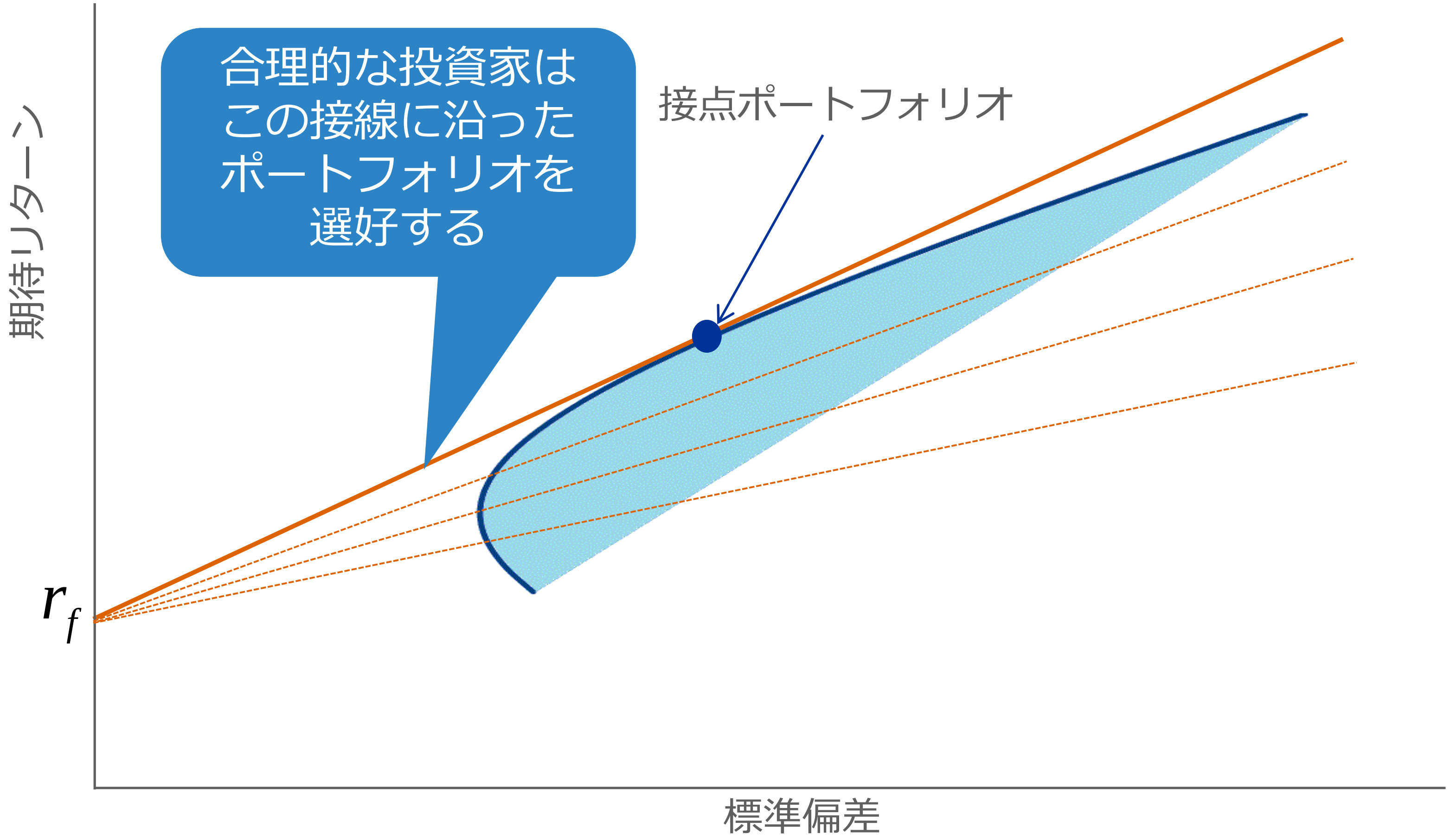
負の組入比率は、
借り入れの状態を表す

リスク・フリー資産と株式資産（3）



すべての株式資産とリスク・フリー資産

- すべての株式資産にリスク・フリー資産を組み合わせる
  - 「効率的フロンティア」に接する組み合わせ、すなわち「接点ポートフォリオ」とリスク・フリー資産との組み合わせが最も効率的



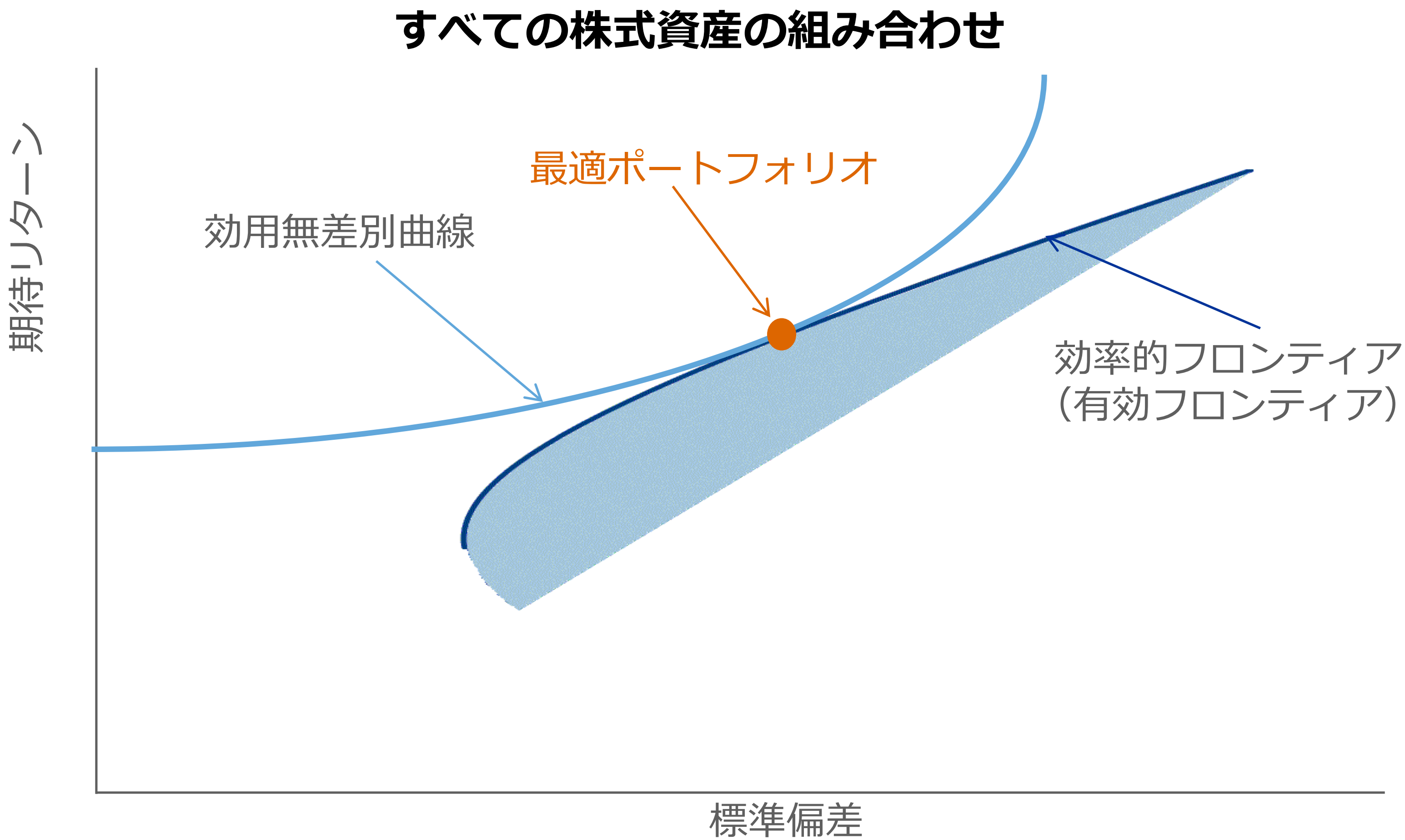
最適ポートフォリオの選択

ポートフォリオの期待リターンとリスクの選択では、同じリスク水準なら期待リターンの高いほうのポートフォリオを選択する、その結果として上に凸の「効率的フロンティア」と呼ばれるポートフォリオ集合が導き出されました。しかしこれだけでは、一つのポートフォリオを選ぶことはできません。そこで登場するのが、先週説明した「効用無差別曲線」です。

投資家のリスク回避の強さによって効用無差別曲線の形は異なりますが、下に凸であることに違いはありませんので、効率的フロンティアと1点で接します。それが投資家が選択すべき「最適ポートフォリオ」なのです。

株式資産のみのポートフォリオの選択

› 効率的フロンティアと効用無差別曲線の接点が、「最適ポートフォリオ」となる



リスク・フリー資産を含めたポートフォリオ選択

› 「接点ポートフォリオ」とリスク・フリー資産との組み合わせの中で、効用無差別曲線に接するものが「最適ポートフォリオ」